Ответы: ЕГЭ по Математике (профиль)

1	17,5
2	10
3	338
4	0,05
5	0,03
6	-13
7	-13
8	3
9	97
10	31
11	-10
12	-3
13	

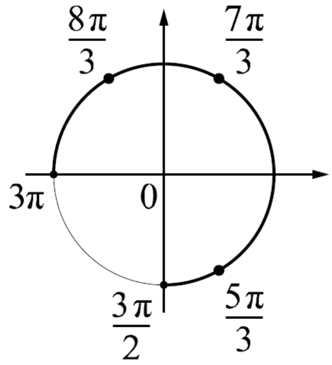
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0,75;\ \sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

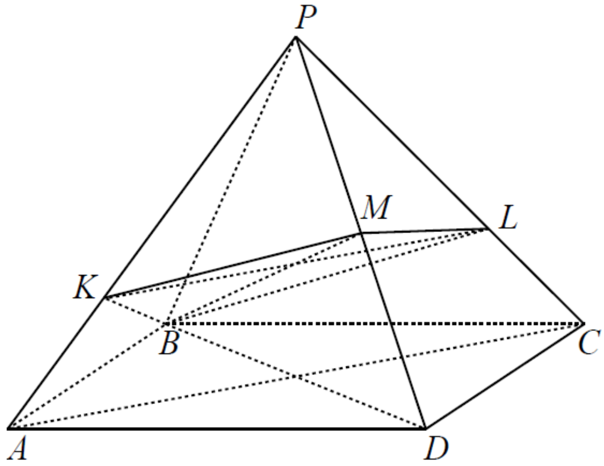
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.



Получим числа $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$.

14

Решение.



а) Пусть точка M — середина ребра PD. Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD, отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP = BD$, но, так как $PB = PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD = 60°$, что и требовалось доказать.

б) Из доказанного следует, что $PA = AB\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ и $BM = 9\sqrt{6}$ как высота равностороннего треугольника BPD.

По теореме косинусов в треугольнике APD получаем:

$AD^2 = AP^2 + PD^2 - 2AP \cdot PD \cdot \cos\angle APD$, следовательно, $\cos\angle APD = \dfrac{3}{4}$.

Пусть четырёхугольник $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK = \dfrac{PM}{\cos\angle APD} = 12\sqrt{2}$. Аналогично $PL = 12\sqrt{2}$. Значит, $PK = PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC. Поэтому $LK = 12\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD, а прямая BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}BM \cdot KL = \frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{6} \cdot 12\sqrt{2} = 108\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $108\sqrt{3}$.

15

Решение.
Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{4\cdot 3^{2x}-21\cdot 3^{x}+27}{3^{x+2}\left(3-3^{x}\right)}\le\frac{1}{3^{x+2}};$$

$$\frac{\left(4\cdot 3^{x}-9\right)\left(3^{x}-3\right)}{3^{x+2}\left(3-3^{x}\right)}\le\frac{1}{3^{x+2}};$$

$$\begin{cases}4\cdot 3^{x}-9\ge -1,\\ x\ne 1;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 2\le x<1\\ x>1.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\log_3 2;\,1\right)$; $\left(1;+\infty\right)$.

16

Решение.
Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 13 %, т. е. увеличивается в 1,13 раза. Поэтому через два года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}13^2 S=1{,}2769S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}07\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.
По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}07\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S>1{,}2769S,$$

$$1+\frac{n}{100}>\frac{12769}{10700}=1{,}193\ldots$$

При $n=20$ неравенство

$$1{,}20>1{,}193\ldots$$

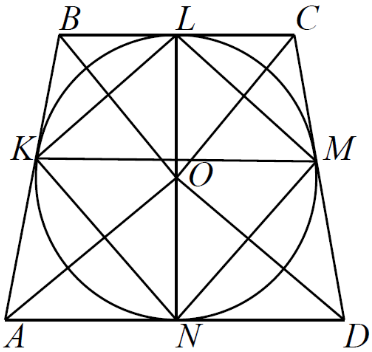
верно, а при $n=19$ неравенство

$$1{,}19>1{,}193\ldots$$

неверно, как и при всех меньших n.
Ответ: 20.

17

Решение.



а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC соответственно.

Следовательно,

$$\angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC =$$

$$= \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°;$$

$$\angle AOB = 180° - \angle OAB - \angle OBA = 180° - 90° = 90°.$$

Отрезок AB виден из точки O под углом 90°. Следовательно, точка O принадлежит окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре.

б) Пусть K, L, M и N — точки касания окружности со сторонами AB, BC, CD и AD данной трапеции соответственно. Тогда L — середина основания BC, потому что $\angle ABC = \angle BCD$, $\angle OBL = \angle OCL$ и прямоугольные треугольники OBL и OCL равны по общему катету OL и острому углу. Аналогично N — середина основания AD. Обозначим

$$CM = CL = BL = BK = x;$$

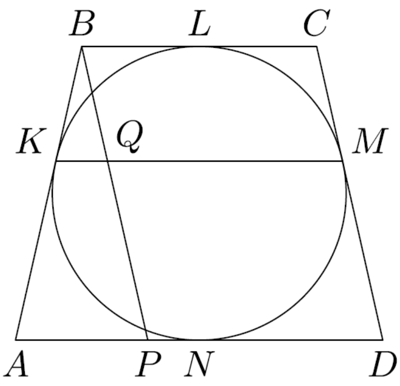
$$DM = DN = AN = AK = y \quad (x < y);$$

$$OK = OL = ON = OM = r;$$

$$x = \frac{3}{4}y.$$

Тогда $y = \frac{4}{3}x$, $LN = 2r$ — высота трапеции, а KM равно среднему гармоническому длин отрезков AD и BC: $KM = \dfrac{2\cdot AD\cdot BC}{AD + BC}$.

Для полноты докажем это утверждение. Отложим на стороне AD отрезок $PD = BC$, и пусть Q — точка пересечения отрезков BP и KM. Тогда $BCDP$ — параллелограмм и BP параллельно CD.



Легко видеть, что $BK=\frac{BC}{2}$, $AK=\frac{AD}{2}$, $AB=\frac{AD+BC}{2}$, $QM=BC$, а KQ находится из подобия треугольников BKQ и BAP:

$$\frac{KQ}{AP}=\frac{BK}{AB}=\frac{BC}{AD+BC},\ KQ=\frac{(AD-BC)\cdot BC}{AD+BC},$$

$$KM=KQ+QM=\frac{BC\cdot(AD-BC)}{AD+BC}+BC=\frac{2\cdot AD\cdot BC}{AD+BC}.$$

$$KM=\frac{2BC\cdot AD}{BC+AD}=\frac{2\cdot 2x\cdot 2y}{2x+2y}=\frac{4xy}{x+y}=\frac{4\cdot 4\cdot 3\cdot x^2}{3\cdot 7x}=\frac{16}{7}x.$$

Пусть площадь трапеции $ABCD$ равна S, а площадь четырёхугольника $KLMN$ равна S_1. Тогда

$$S=\frac{BC+AD}{2}\cdot LN=\frac{2x+2y}{2}\cdot 2r=2(x+y)r=\frac{14}{3}xr,$$

а так как диагонали KM и LN четырёхугольника $KLMN$ перпендикулярны, получаем, что

$$S_1=\frac{1}{2}KM\cdot LN=\frac{1}{2}\cdot\frac{16x}{7}\cdot 2r=\frac{16}{7}xr.$$

Следовательно,

$$\frac{S_1}{S}=\frac{16xr\cdot 3}{7\cdot 14xr}=\frac{24}{49}.$$

Ответ: б) $\frac{24}{49}$.

18

Решение.

При $a<2$ система не имеет решений.

При $a=2$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(x-9)^2+(y-5)^2=0,\\ 3x-4y=7.\end{cases}$$

Первому уравнению удовлетворяет только пара $(9;5)$, которая также удовлетворяет второму уравнению системы, поэтому при $a=2$ система имеет единственное решение.

При $a>2$ первое уравнение задаёт окружность с центром в точке $(5a-1;\ 2a+1)$, радиус которой равен $\sqrt{a-2}$. Второе уравнение задаёт прямую $3x-4y=2a+3$. Следовательно, система не имеет решений тогда и только тогда, когда расстояние от центра $(5a-1;\ 2a+1)$ окружности до прямой $3x-4y=2a+3$ больше радиуса $\sqrt{a-2}$ окружности. Получаем

$$\begin{cases}\dfrac{|3(5a-1)-4(2a+1)-2a-3|}{\sqrt{3^2+4^2}}>\sqrt{a-2},\\ a>2;\end{cases}\quad \begin{cases}|5a-10|>5\sqrt{a-2},\\ a>2;\end{cases}\quad a>3.$$

Следовательно, система не имеет решений при $a\in(-\infty;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$.

19

Решение.

а) Аня может купить, например, 10 больших и 14 маленьких конвертов:

$$10\cdot 32+14\cdot 25=670 \text{ (руб.)}.$$

б) Дешевле всего 29 конвертов будут стоить, если купить наибольшее возможное число маленьких конвертов и наименьшее возможное число больших, то есть если купить 12 больших и 17 маленьких, поскольку если больших меньше 12, то маленьких больше 17, и в этом случае разность между числом больших и маленьких больше чем 5. Но тогда стоимость покупки составляет

$$12\cdot 32+17\cdot 25=809 \text{ (руб.)},$$

что больше, чем имеющиеся 800 рублей.

в) Пусть n и m — число маленьких и больших конвертов соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 32m+25n\le 800, \\ |m-n|\le 5, \\ m,n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Положим $s=n+m$, тогда

$$\begin{cases} 7m+25s\le 800, \\ -5\le 2m-s\le 5, \\ m=0,1,\ldots,s; \end{cases} \qquad \begin{cases} m\le \dfrac{800-25s}{7}, \\ \dfrac{s-5}{2}\le m\le \dfrac{s+5}{2}, \\ m=0,1,\ldots,s. \end{cases}$$

Следовательно, $\dfrac{s-5}{2}\le \dfrac{800-25s}{7}$, а значит, $s\le \dfrac{1635}{57}=28\dfrac{13}{19}$.

Аня может купить не больше 28 конвертов.

Покажем, что Аня может купить 28 конвертов.

При $m=12$, $n=16$ получаем $12\cdot 32+16\cdot 25=784<800$.

Значит, Аня может купить 28 конвертов.

Ответ: а) да; б) нет; в) 28.